XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Старшая группа, высшая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *В последовательности натуральных чисел a0, a1, … для каждого натурального n число an−1an+1 делится на число an2. Оказалось, что для некоторого натурального k числа ak и a1 взаимно просты. Докажите, что a0 делится на a1.*

**Решение**. Достаточно доказать, что если *p* ⎯ простое число и *a*1 делится на *pm* (*m* ≥ 1) то и *a*0 делится на *pm*. В самом деле, пусть это не так. Тогда, поскольку *a*0*a*2 делится на *a*12, и *a*12 делится на *p*2*m*, то *a*2 должно делиться хотя бы на *pm*+1. Таким образом, показатель, с которым *p* входит в разложение числа *a*2 на простые множители, должен быть хотя бы на 1 больше соответствующего показателя для *a*1. Аналогично доказывается, что показатель *p* в разложении *a*3 хотя бы на 1 больше показателя *p* в разложении *a*2 и т.д. Но это значит, что все числа последовательности, кроме, может быть, *a*0, делятся на *p*, и *ak* с *a*1 не могут быть взаимно просты. Противоречие.

**2.** *В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и CA отмечены точки X, Y и Z соответственно. Отрезки AY, BZ и CX пересекаются в точке P. Докажите, что AB+BC+CA > 2(PX+PY+PZ).*

**Решение**. Докажем для начала, что *AX*+*AZ* > *PX*+*PZ*. Проведём через точку *X* прямую, параллельную *AC*, а через точку *Z* — прямую, параллельную *AB*. Пусть они пересекаются в точке *Q*. Несложно видеть, что точка *P* лежит внутри треугольника *XQZ*. Известен факт, что тогда *XP*+*PZ* < *XQ*+*QZ*, но *AXQZ* — параллелограмм, поэтому *XQ*+*QZ* = *AX*+*XZ*, откуда и следует заявленное неравенство. Аналогично, *BX*+*BY* > *XP*+*PY* и *CY*+*CZ* > *PY*+*PZ*. Складывая три полученных неравенства, получаем требуемое.

**3.** *У Амбарцума есть восемь кубиков 1×1×1. Каждая грань этих кубиков покрашена в один из 12 цветов. Оказалось, что в каждый цвет покрашены ровно 4 грани. Докажите, что из этих кубиков Наири, друг Амбарцума, может сложить куб 2×2×2 таким образом, чтобы на его поверхности было по 2 квадрата каждого цвета.*

**Решение**. Для начала отметим по две грани каждого цвета 1-12 и перекрасим каждую отмеченную грань цвета *k* в новый цвет *k*+12. Теперь нам достаточно сложить куб с ребром 2 так, чтобы снаружи было по одному квадрату всех цветов 1-24. Рассмотрим граф, вершинами которого являются грани кубиков, а рёбра соединяют, во-первых, противоположные грани одного кубика и, во-вторых, грани, покрашенные в один цвет (если противоположные грани кубика покрашены в один цвет, они соединяются двумя рёбрами). Получим граф, в котором все вершины имеют степень 2. Он разбивается на непересекающиеся циклы. Поскольку цвета в циклах встречаются парами, длины всех циклов чётны. В каждом цикле отметим одну из вершин и все вершины, между которыми и первой отмеченной ⎯ нечётное число вершин цикла. Тогда будет отмечено по одной грани каждого цвета, и у каждого кубика окажутся отмеченными три грани, среди которых нет противоположных. Три такие грани имеют общую вершину, и потому мы сможем сложить из наших кубиков куб 2×2×2 так, чтобы все отмеченные грани кубиков оказались снаружи.

♦ Задача сведена к случаю 24 цветов без дальнейшего продвижения: *2 балла*. Любой неполный перебор ⎯ *0 баллов*.

**4.** *По кругу стоят несколько гирь, среди которых есть гири разного веса (веса не обязательно целые). В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в тройке. Докажите, что число гирь делится на три.*

**Решение**. Посчитаем все разности, вычитая из веса гири вес правого соседа. Пусть *d* ⎯ наименьшая по модулю разность весов.Заметим, что если в тройке средний вес ⎯ у средней гири, то в этой тройке обе разности равны, а если у крайней, то отношение разностей равно –2. Поэтому все разности принадлежат списку: *d*, –2*d*, 4*d*, –8*d*, … . Пройдя по кругу, мы вернёмся к тому же весу, поэтому сумма всех разностей равна 0. С другой стороны, по модулю 3 все коэффициенты при *d* в разностях равны 1. Поэтому сумма всех разностей должна иметь вид *nd*, где *n* сравнимо с числом гирь по модулю 3. Так как *d* ≠ 0 (поскольку не все гири одинаковы), это возможно только при *n* = 0, откуда и вытекает утверждение задачи.

♦ Доказано, что разности различаются в 2*n* раз, дальнейшего продвижения нет: *4 балла*.

**5.** *В треугольнике ABC, где AB < AC < BC, AD ⎯ высота, AM ⎯ медиана. Точка E симметрична точке B относительно точки D. Перпендикуляр к BC в точке E пересекает отрезок AC в точке P. Докажите, что если BP и AM перпендикулярны, то треугольник ABC ⎯ прямоугольный.*

**Решение**. Пусть отрезки *BP* и *AD* пересекаются в точке *H*. Поскольку *PE* ⊥ *BC*, то *PE* || *AD*. Следовательно, поскольку *D* — середина *BE*, имеем *BH* = *HP*, а значит *MH* — средняя линия в треугольнике *BCP*. Следовательно, *MH* || *AC*. Осталось заметить, что если *AM* ⊥ *BP*, то *H* — точка пересечения высот треугольника *AMB* и *AC* || *MH* ⊥ *AB*, откуда ∠*BAC* = 90°.

**6.** *На окружности стоят 100 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят по одной хорде, соединяющей пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны пересекаться (возможно по концу). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника?*

**Ответ**. Вася. **Решение**. Заметим, что если в какой-то момент три проведенные хорды образуют треугольник *ABC*, у которого сторона *AB* соединяет две соседние точки, то в течение игры кроме сторон треугольника *ABC* могут быть проведены те и только те хорды, которые соединяют либо точку *A* с точками на не содержащей точку *A* дуге *BC*, либо точку *B* с точками на не содержащей точку *B* дуге *AC*. Поскольку таких точек ровно 97, последний ход будет за Васей. Покажем, что Вася всегда может добиться появления такого треугольника.

Своим первым ходом Вася проводит хорду *AB* длины 1 с концом в одном из концов хорды *AC*, которую провел перед этим Петя. Если Петя своим вторым ходом провел хорду *BC*, нужный треугольник уже появился, а если он провел хорду *BD*, где *D* ≠ *C*, Вася следующим ходом проведет хорду *AD* и победит. Если же Петя своим вторым ходом провел хорду *AD*, посмотрим, где лежит точка *D*. Если на дуге *AC*, содержащей *B*, то Вася проведет хорду *BC*, иначе ⎯ хорду *BD*, создавая в обоих случаях треугольник со стороной *AB*.

**7.** *Решите в натуральных числах уравнение n2m5−2n5m = 2015+4nm.*

**Ответ**. *n* = 5, *m* = 3. **Решение**. Поскольку *n*2*m*5 = 2015+4*nm*+2*n*5*m* нечётно, *n* и *m* нечётны. Рассматривая наше уравнение по модулю 5, получаем, что *n*2*m*5 ≡ *n*2*m* ≡ 4*nm*, откуда или *n* ≡ 0, 4 или *m* ≡ 0. Рассматривая наше уравнение по модулю 8 и используя нечётность *n* и *m*, получаем, что *m*–2*n*⋅5 ≡ –1+4, или *m* ≡ 5(2*n*–1). Следовательно, либо *n* = 1 и *m* ≥ 5, либо *n* ≥ 3 и *m* ≡ 3 (mod 8).

Если *n* = 1 и *m* ≥ 5, то уравнение приобретает вид *m*5–2⋅5*m* = 2015+4*m*. Это уравнение не имеет решения, поскольку при *m* ≥ 5 левая часть отрицательна (что можно доказать индукцией по *m*).

Если *n* = 3, то *m* ≡ 3 (mod 8) и *m* ≡ 0 (mod 5). Но тогда *m* ≥ 35 и 9⋅*m*5–8⋅5*m* вновь отрицательно.

Если *n* ≥ 5 и *m* ≠ 3, то *m* ≥ 5. В этом случае *n*2 < 2*n*, *m*5 ≤ 5*m*, откуда *n*2*m*5–2*n*5*m* вновь отрицательно.

Если *n* ≥ 7 и *m* = 3, поскольку *n* ≡ 0, 4 (mod 5), то *n* ≥ 9. Следовательно, *n*2⋅35–2*n*53 < 35(*n*2–2*n*–2) вновь отрицательно.

В случае *n* = 5, *m* = 3 выполняется равенство.

♦ Получены разумные ограничения сверху на *m* и *n*: *4 балла*. Неполный перебор: *не более 6 баллов*. Отсутствие проверки ответа: *дыра в 2 балла*.

**8.** *Сколькими способами можно вырезать из клетчатого прямоугольника 2×2017 две клетки так, чтобы остаток можно было разрезать на уголки из трёх клеток? Ответ требуется дать в виде числа в десятичной записи.*

**Ответ**. 3618721. **Решение**. Рассмотрим два случая.

1) *Вырезанные клетки находятся в одном столбце*. Тогда прямоугольник 2×2017 должен распадаться на два (один из которых может быть пустым), длинная сторона каждого из которых делится на 3. Это можно сделать [2017/3]+1 = 673 способами.

2) *Вырезанные клетки находятся в разных столбцах*. Тогда прямоугольник 2×2017 разбивается на два уголка, которые вместе с вырезанными клетками образуют два квадрата 2×2, и пары уголков, образующие прямоугольники 2×3. Значит, надо подсчитать число способов, которыми можно из прямоугольника 2×2017 вырезать два квадрата 2×2 так, чтобы оставшуюся часть прямоугольника 2×2017 можно было разбить на прямоугольники 2×3, то есть чтобы остались три прямоугольника (один или два из которых могут быть пустыми), с длинными сторонами, делящимися на 3, и умножить его на 16 (число способов вырезать по одной клетке из двух квадратов 2×2). Если левый квадрат примыкает к краю прямоугольника 2×2017, то способов вырезать второй квадрат существует [2015/3]+1 = 672. Сдвигая левый квадрат на 3 вправо, получаем 671 способ разместить правый квадрат и т.д. Итого получаем 673+16⋅(672+671+…+2+1) = 3618721.

♦ Внятно описаны оба возможных случая, разобранные в нашем решении: *4 балла*. Арифметические ошибки при верных принципах подсчета: *дыра в 4 балла*.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Старшая группа, первая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *В последовательности натуральных чисел a0, a1, … для каждого натурального n число an−1an+1 делится на число an2. Оказалось, что для некоторого натурального k числа ak и a1 взаимно просты. Докажите, что a0 делится на a1.*

**Решение**. Достаточно доказать, что если *p* ⎯ простое число и *a*1 делится на *pm* (*m* ≥ 1) то и *a*0 делится на *pm*. В самом деле, пусть это не так. Тогда, поскольку *a*0*a*2делится на *a*12, и *a*12 делится на *p*2*m*, то *a*2 должно делиться хотя бы на *pm*+1. Таким образом, показатель, с которым *p* входит в разложение числа *a*2 на простые множители, должен быть хотя бы на 1 больше соответствующего показателя для *a*1. Аналогично доказывается, что показатель *p* в разложении *a*3 хотя бы на 1 больше показателя *p* в разложении *a*2 и т.д. Но это значит, что все числа последовательности, кроме, может быть, *a*0, делятся на *p*, и *ak* с *a*1 не могут быть взаимно просты. Противоречие.

**2.** *Дан ромб ABCD. Внутри треугольника BCD отмечена точка P. Прямая, проходящая через A параллельно PB, пересекает прямую CD в точке X; прямая, проходящая через A параллельно PD, пересекает прямую BC в точке Y. Докажите, что прямая AP делит отрезок XY пополам.*

**Решение**. Пусть прямые *PD* и *AX* пересекаются в точке *M*, а прямые *PB* и *AY* — в точке *N*. Поскольку *PMAN* — параллелограмм, в нём диагонали делятся точкой пересечения пополам. Поэтому нам достаточно доказать, что *XY* параллельно *MN*. Для этого, в силу теоремы, обратной теореме Фалеса, достаточно доказать, что *AM*/*MX* = *AN*/*NY*.

Заметим, что ∠*AMD* = ∠*ANB*, а также ∠*XDM* = ∠*PDC* = ∠*NAB*, где первое равенство следует из вертикальности указанных углов, а второе — из равенства углов с попарно параллельными сторонами. Значит, треугольники *MDX* и *NAB* подобны по двум углам и *AN*/*MD* = *BN*/*MX*. Аналогично, подобны треугольники *NBY* и *MAD*, а *MD*/*NY* = *AM*/*BN*. Перемножая полученные равенства получаем *AM*/*MX* = *AN*/*NY*, что и требовалось.

♦ Разобран хотя бы один существенный случай: *не менее 10 баллов*.

**3.** *У Амбарцума есть восемь кубиков 1×1×1. Каждая грань этих кубиков покрашена в один из 24 цветов. Оказалось, что в каждый цвет покрашены ровно 2 грани. Докажите, что из этих кубиков Наири, друг Амбарцума, может сложить куб 2×2×2 таким образом, чтобы на его поверхности был квадрат каждого цвета.*

**Решение**. Рассмотрим граф, вершинами которого являются грани кубиков, а рёбра соединяют, во первых, противоположные грани одного кубика и, во-вторых, грани, покрашенные в один цвет (если противоположные грани кубика покрашены в один цвет, они соединяются двумя рёбрами). Получим граф, в котором все вершины имеют степень 2. Он разбивается на непересекающиеся циклы. Поскольку цвета в циклах встречаются парами, длины всех циклов чётны. В каждом цикле отметим одну из вершин и все вершины, между которыми и первой отмеченной ⎯ нечётное число вершин цикла. Тогда будет отмечено по одной грани каждого цвета, и у каждого кубика окажутся отмеченными три грани, среди которых нет противоположных. Три такие грани имеют общую вершину, и потому мы сможем сложить из наших кубиков куб 2×2×2 так, чтобы все отмеченные грани кубиков оказались снаружи.

**4.** *По кругу стоят несколько гирь, среди которых есть гири разного веса (веса не обязательно целые). В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в тройке. Докажите, что число гирь делится на 3.*

**Решение**. Посчитаем все разности, вычитая из веса гири вес правого соседа. Пусть *d* ⎯ наименьшая по модулю разность весов.Заметим, что если в тройке средний вес ⎯ у средней гири, то в этой тройке обе разности равны, а если у крайней, то отношение разностей равно –2. Поэтому все разности принадлежат списку: *d*, –2*d*, 4*d*, –8*d*, … . Пройдя по кругу, мы вернёмся к тому же весу, поэтому сумма всех разностей равна 0. С другой стороны, по модулю 3 все коэффициенты при *d* в разностях равны 1. Поэтому сумма всех разностей должна иметь вид *nd*, где *n* сравнимо с числом гирь по модулю 3. Так как *d* ≠ 0 (поскольку не все гири одинаковы), это возможно только при *n* = 0, откуда и вытекает утверждение задачи.

♦ Доказано, что разности различаются в 2*n* раз, дальнейшего продвижения нет: *4 балла*.

**5.** *В треугольнике ABC, где AB < AC < BC, AD ⎯ высота, AM ⎯ медиана. Точка E симметрична точке B относительно точки D. Перпендикуляр к BC в точке E пересекает отрезок AC в точке P. Докажите, что если BP и AM перпендикулярны, то треугольник ABC ⎯ прямоугольный.*

**Решение**. Пусть отрезки *BP* и *AD* пересекаются в точке *H*. Поскольку *PE* ⊥ *BC*, то *PE* || *AD*. Следовательно, поскольку *D* — середина *BE*, имеем *BH* = *HP*, а значит *MH* — средняя линия в треугольнике *BCP*. Следовательно, *MH* || *AC*. Осталось заметить, что если *AM* ⊥ *BP*, то *H* — точка пересечения высот треугольника *AMB* и *AC* || *MH* ⊥ *AB*, откуда ∠*BAC* = 90°.

**6.** *На окружности стоят 99 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят по одной хорде, соединяющей пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны пересекаться (возможно по концу). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника?*

**Ответ**. Петя. **Решение**. Своим первым ходом Петя проводит хорду, соединяющую две соседние точки. Вася проводит хорду из одного из концов Петиной хорды, а Петя вторым ходом образует треугольник из проведённых хорд. Пусть это треугольник *ABC*, у которого сторона *AB* соединяет две соседние точки. Тогда в течение игры кроме сторон треугольника *ABC* могут быть проведены те и только те хорды, которые соединяют либо точку *A* с точками на не содержащей точку *A* дуге *BC*, либо точку *B* с точками на не содержащей точку *B* дуге *AC*. Поскольку таких точек ровно 96, последний ход будет за Петей.

**7.** *Хан сказал Чаку натуральные числа n и d. Чак выписал все натуральные числа, а после этого подчеркнул все числа, дающие такой же остаток при делении на d, как и число . Нашлось такое натуральное число m ≠ n, что число  подчёркнуто. Докажите, что найдется такое натуральное число k, отличное от m и n, что число  подчёркнуто.*

**Решение**. Не умаляя общности можно считать, что *m* < *n*. Как известно, остатки от деления степеней двойки на *d* периодичны с некоторым периодом *a*. Значит, 2*n*−2*m* делится на *a*. Положим *k* = 2*n*−*m*. Тогда 2*k*−2*n* = 2*n−m*(2*n*−2*m*) также делится на *a*, и число ** делится на *d*.

**8.** *Сколькими способами можно вырезать из клетчатого прямоугольника 2×2015 одну клетку так, чтобы остаток можно было разрезать на уголки из трёх клеток? Ответ требуется дать в виде числа в десятичной записи.*

**Ответ**. 2688. **Решение**. Клетчатый прямоугольник 2×2015, из которого вырезана клетка, разбивается на уголок, который вместе с вырезанной клеткой образует квадрат 2×2, и пары уголков, образующие прямоугольники 2×3. Значит, надо подсчитать число способов, которыми можно из прямоугольника 2×2015 вырезать квадрат 2×2 так, чтобы оставшуюся часть прямоугольника 2×2015 можно было разбить на прямоугольники 2×3. Нетрудно убедиться, что таких способов существует [2015/3]+1 = 672, откуда и получается ответ.

♦ Внятно описана конфигурация разбиения, разобранная в нашем решении: *4 балла*. Арифметические ошибки при верном принципе подсчета: *дыра в 4 балла*.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Старшая группа, вторая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *В ряд выписана тысяча натуральных чисел. Для любого не стоящего с краю числа его квадрат является делителем произведения двух его соседей. Известно, что второе число взаимно просто с последним. Докажите, что первое число делится на второе*

**Решение**. Пронумеруем числа по порядку: *a*0, …, *a*999. Достаточно доказать, что если *p* ⎯ простое число и *a*1 делится на *pm* (*m* ≥ 1) то и *a*0 делится на *pm*. В самом деле, пусть это не так. Тогда, поскольку *a*0*a*2 делится на *a*12, и *a*12 делится на *p*2*m*, то *a*2 должно делиться хотя бы на *pm*+1. Таким образом, показатель, с которым *p* входит в разложение числа *a*2 на простые множители, должен быть хотя бы на 1 больше соответствующего показателя для *a*1. Аналогично доказывается, что показатель *p* в разложении *a*3 хотя бы на 1 больше показателя *p* в разложении *a*2 и т.д. Но это значит, что все данные числа кроме, может быть, *a*0, делятся на *p*, и *a*999с *a*1 не могут быть взаимно просты. Противоречие.

**2.** *Докажите, что для любых положительных чисел a, b и c по крайней мере одно из чисел (a+b+c)2–8bc, (a+b+c)2–8ca и (a+b+c)2–8ab положительно.*

**Решение**. Нетрудно показать, что сумма этих трёх чисел равна 3(*a*2+*b*2+*c*2)−2(*ab*+*bc*+*ca*). Это выражение положительно, так как *a*2+*b*2+*c*2 ≥ *ab*+*bc*+*ca*.

♦ Доказана неотрицательность одного из чисел: *не менее 8 баллов*.

**3.** *В очередь на экзамен к профессору Прохладному выстроилась группа из 20 студентов, а заходить в аудиторию им страшно. Поэтому студенты стали тянуть жребий: они написали на бумажках числа от 1 до 20, сложили в ёмкость, и наугад разобрали бумажки. Студент, получивший бумажку с числом 1, пошел в аудиторию. Затем оставшиеся 19 студентов повторили процесс: написали на бумажках числа от 1 до 19, сложили в ёмкость, и наугад разобрали бумажки. Студент, получивший бумажку с числом 1, пошел в аудиторию. Всего жребий тянули 20 раз, пока все студенты не зашли в аудиторию. Чудесным образом оказалось, что для каждого студента все вытянутые им номера различны. Украшение группы Ольга в первый раз вытащила число 14. Какой по счету она пошла отвечать?*

**Ответ**. 14-ой. **Решение**. Студент, который пошел отвечать последним, должен был вытащить бумажки со всеми номерами от 1 до 20. Но бумажку с номером 20 он мог вытащить только при первой жеребьёвке. Поэтому бумажку с номером 19 он мог вытащить только при второй жеребьёвке и т.д., то есть он при каждой жеребьёвке вытаскивал бумажку с самым большим номером. Забудем про него и его бумажки. Тогда аналогично доказывается, что тот, кто пошел отвечать 19-м, вытаскивал при каждой жеребьёвке с самым большим номером из оставшихся. Продолжая рассуждение, получаем, что студенты отвечали в порядке номеров, полученных при первой жеребьёвке.

**4.** *По кругу стоят несколько гирь, среди которых есть гири разного веса (веса не обязательно целые). В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в тройке. Докажите, что число гирь делится на 3.*

**Решение**. Посчитаем все разности, вычитая из веса гири вес правого соседа. Пусть *d* ⎯ наименьшая по модулю разность весов.Заметим, что если в тройке средний вес ⎯ у средней гири, то в этой тройке обе разности равны, а если у крайней, то отношение разностей равно –2. Поэтому все разности принадлежат списку: *d*, –2*d*, 4*d*, –8*d*, … . Пройдя по кругу, мы вернёмся к тому же весу, поэтому сумма всех разностей равна 0. С другой стороны, по модулю 3 все коэффициенты при *d* в разностях равны 1. Поэтому сумма всех разностей должна иметь вид *nd*, где *n* сравнимо с числом гирь по модулю 3. Так как *d* ≠ 0 (поскольку не все гири одинаковы), это возможно только при *n* = 0, откуда и вытекает утверждение задачи.

♦ Доказано, что разности различаются в 2*n* раз, дальнейшего продвижения нет: *4 балла*.

**5.** *В треугольнике ABC, где AB < AC < BC, AD ⎯ высота, AM ⎯ медиана. Точка E симметрична точке B относительно точки D. Перпендикуляр к BC в точке E пересекает отрезок AC в точке P. Докажите, что если BP и AM перпендикулярны, то треугольник ABC ⎯ прямоугольный.*

**Решение**. Пусть отрезки *BP* и *AD* пересекаются в точке *H*. Поскольку *PE* ⊥ *BC*, то *PE* || *AD*. Следовательно, поскольку *D* — середина *BE*, имеем *BH* = *HP*, а значит *MH* — средняя линия в треугольнике *BCP*. Следовательно, *MH* || *AC*. Осталось заметить, что если *AM* ⊥ *BP*, то *H* — точка пересечения высот треугольника *AMB* и *AC* || *MH* ⊥ *AB*, откуда ∠*BAC* = 90°.

**6.** *На окружности стоят 99 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят по одной хорде, соединяющей пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны пересекаться (возможно по концу). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника?*

**Ответ**. Петя. **Решение**. Своим первым ходом Петя проводит хорду, соединяющую две соседние точки. Вася проводит хорду из одного из концов Петиной хорды, а Петя вторым ходом образует треугольник из проведённых хорд. Пусть это треугольник *ABC*, у которого сторона *AB* соединяет две соседние точки. Тогда в течение игры кроме сторон треугольника *ABC* могут быть проведены те и только те хорды, которые соединяют либо точку *A* с точками на не содержащей точку *A* дуге *BC*, либо точку *B* с точками на не содержащей точку *B* дуге *AC*. Поскольку таких точек ровно 96, последний ход будет за Петей.

**7.** *Хан сказал Чаку натуральные числа n и d. Чак выписал все натуральные числа, а после этого подчеркнул все числа, дающие такой же остаток при делении на d, как и число . Нашлось такое натуральное число m ≠ n, что число  подчёркнуто. Докажите, что найдется такое натуральное число k, отличное от m и n, что число  подчёркнуто.*

**Решение**. Не умаляя общности можно считать, что *m* < *n*. Как известно, остатки от деления степеней двойки на *d* периодичны с некоторым периодом *a*. Значит, 2*n*−2*m* делится на *a*. Положим *k* = 2*n*−*m*. Тогда 2*k*−2*n* = 2*n−m*(2*n*−2*m*) также делится на *a*, и число ** делится на *d*.

**8.** *Сколькими способами можно вырезать из клетчатого прямоугольника 2×2015 одну клетку так, чтобы остаток можно было разрезать на уголки из трёх клеток? Ответ требуется дать в виде числа в десятичной записи.*

**Ответ**. 2688. **Решение**. Клетчатый прямоугольник 2×2015, из которого вырезана клетка, разбивается на уголок, который вместе с вырезанной клеткой образует квадрат 2×2, и пары уголков, образующие прямоугольники 2×3. Значит, надо подсчитать число способов, которыми можно из прямоугольника 2×2015 вырезать квадрат 2×2 так, чтобы оставшуюся часть прямоугольника 2×2015 можно было разбить на прямоугольники 2×3. Нетрудно убедиться, что таких способов существует [2015/3]+1 = 672, откуда и получается ответ.

♦ Внятно описана конфигурация разбиения, разобранная в нашем решении: *4 балла*. Арифметические ошибки при верном принципе подсчета: *дыра в 4 балла*.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Младшая группа, высшая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *По кругу стоят 100 точек, покрашенных в 100 разных цветов. На каждом ходу разрешается проделывать одну из трёх операций:*

*(i) Между любыми двумя разноцветными точками можно вставить точку, совпадающую по цвету с любой из этих двух.*

*(ii) Из любых трёх последовательных точек, среди которых есть одноцветные, можно удалить среднюю.*

*(iii) Между любыми двумя одноцветными точками можно вставить точку любого цвета.*

*Может ли через несколько таких операций остаться 99 точек?*

**Ответ**. Нет. **Решение**. Назовём точки цветов *a* и *b*, стоящие рядом, (*a*, *b*)-*положительной* (соотв., (*a*, *b*)-*отрицательной*) парой, если точка цвета *b* идет после (соотв., перед) красной по часовой стрелке. Заметим, что разность между числом (*a*, *b*)-положительных и (*a*, *b*)-отрицательных пар сохраняется при описанных в условии операциях. В исходной позиции было 100 пар стоящих рядом цветов, и для всех этих пар, взятых по часовой стрелке, описанная выше разность равна 1. Значит, для каждого цвета из исходной позиции в финальной позиции должна быть хотя бы одна включающая его пара. Следовательно, в этой позиции должно быть хотя бы 100 точек.

**2.** *Даны натуральные числа n и d. Чак выписал все натуральные числа, дающие такой же остаток при делении на d, как и число . Нашлось такое натуральное число m, не равное n, что число  выписано. Докажите, что найдется такое натуральное число k, отличное от m и n, что число  также выписано.*

**Решение**. Не умаляя общности можно считать, что *m* < *n*. Как известно, остатки от деления степеней двойки на *d* периодичны с некоторым периодом *a*. Значит, 2*n*−2*m* делится на *a*. Положим *k* = 2*n*−*m*. Тогда 2*k*−2*n* = 2*n−m*(2*n*−2*m*) также делится на *a*, и число ** делится на *d*.

**3.** *По кругу стоят несколько гирь, не все они одного веса, и веса не обязательно целые. В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в тройке. Докажите, что число гирь делится на 3.*

**Решение**. Посчитаем все разности, вычитая из веса гири вес правого соседа. Пусть *d* ⎯ наименьшая по модулю разность весов.Заметим, что если в тройке средний вес ⎯ у средней гири, то в этой тройке обе разности равны, а если у крайней, то отношение разностей равно –2. Поэтому все разности принадлежат списку: *d*, –2*d*, 4*d*, –8*d*, … . Пройдя по кругу, мы вернёмся к тому же весу, поэтому сумма всех разностей равна 0. С другой стороны, по модулю 3 все коэффициенты при *d* в разностях равны 1. Поэтому сумма всех разностей должна иметь вид *nd*, где *n* сравнимо с числом гирь по модулю 3. Так как *d* ≠ 0 (поскольку не все гири одинаковы), это возможно только при *n* = 0, откуда и вытекает утверждение задачи.

♦ Доказано, что разности различаются в 2*n* раз, дальнейшего продвижения нет: *4 балла*.

**4.** *На окружности стоят 100 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны иметь общую точку (хотя бы конец). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть, независимо от игры соперника?*

**Ответ**. Вася. **Решение**. Заметим, что если в какой-то момент три проведенные хорды образуют треугольник *ABC*, у которого сторона *AB* соединяет две соседние точки, то в течение игры кроме сторон треугольника *ABC* могут быть проведены те и только те хорды, которые соединяют либо точку *A* с точками на не содержащей точку *A* дуге *BC*, либо точку *B* с точками на не содержащей точку *B* дуге *AC*. Поскольку таких точек ровно 97, последний ход будет за Васей. Покажем, что Вася всегда может добиться появления такого треугольника.

Своим первым ходом Вася проводит хорду *AB* длины 1 с концом в одном из концов хорды *AC*, которую провел перед этим Петя. Если Петя своим вторым ходом провел хорду *BC*, нужный треугольник уже появился, а если он провел хорду *BD*, где *D* ≠ *C*, Вася следующим ходом проведет хорду *AD* и победит. Если же Петя своим вторым ходом провел хорду *AD*, посмотрим, где лежит точка *D*. Если на дуге *AC*, содержащей *B*, то Вася проведет хорду *BC*, иначе ⎯ хорду *BD*, создавая в обоих случаях треугольник со стороной *AB*.

**5.** *У Амбарцума есть восемь кубиков 1×1×1. Каждая грань этих кубиков покрашена в один из 12 цветов. Оказалось, что в каждый цвет покрашены ровно 4 грани. Докажите, что из этих кубиков Наири, друг Амбарцума, может сложить куб 2×2×2 таким образом, чтобы на его поверхности было по 2 квадрата каждого цвета.*

**Решение**. Для начала отметим по две грани каждого цвета 1-12 и перекрасим каждую отмеченную грань цвета *k* в новый цвет *k*+12. Теперь нам достаточно сложить куб с ребром 2 так, чтобы снаружи было по одному квадрату всех цветов 1-24. Рассмотрим граф, вершинами которого являются грани кубиков, а рёбра соединяют, во-первых, противоположные грани одного кубика и, во-вторых, грани, покрашенные в один цвет (если противоположные грани кубика покрашены в один цвет, они соединяются двумя рёбрами). Получим граф, в котором все вершины имеют степень 2. Он разбивается на непересекающиеся циклы. Поскольку цвета в циклах встречаются парами, длины всех циклов чётны. В каждом цикле отметим одну из вершин и все вершины, между которыми и первой отмеченной ⎯ нечётное число вершин цикла. Тогда будет отмечено по одной грани каждого цвета, и у каждого кубика окажутся отмеченными три грани, среди которых нет противоположных. Три такие грани имеют общую вершину, и потому мы сможем сложить из наших кубиков куб 2×2×2 так, чтобы все отмеченные грани кубиков оказались снаружи.

♦ Критерий эйлеровости графа считать известным.

**6.** *В ряд выписана тысяча натуральных чисел. Для любого не стоящего с краю числа его квадрат является делителем произведения двух его соседей. Известно, что второе число взаимно просто с последним. Докажите, что первое число делится на второе*

**Решение**. Пронумеруем числа по порядку: *a*0, …, *a*999. Достаточно доказать, что если *p* ⎯ простое число и *a*1 делится на *pm* (*m* ≥ 1) то и *a*0 делится на *pm*. В самом деле, пусть это не так. Тогда, поскольку *a*0*a*2 делится на *a*12, и *a*12 делится на *p*2*m*, то *a*2 должно делиться хотя бы на *pm*+1. Таким образом, показатель, с которым *p* входит в разложение числа *a*2 на простые множители, должен быть хотя бы на 1 больше соответствующего показателя для *a*1. Аналогично доказывается, что показатель *p* в разложении *a*3 хотя бы на 1 больше показателя *p* в разложении *a*2 и т.д. Но это значит, что все данные числа кроме, может быть, *a*0, делятся на *p*, и *a*999с *a*1 не могут быть взаимно просты. Противоречие.

**7.** *Положительные числа x, y и a удовлетворяют соотношению x6+y6 = ax2y2. Докажите, что x4+y4 ≤ a2/2.*

**Решение**. Заметим, что *ax*2*y*2 = *x*6+*y*6 = (*x*2+*y*2)(*x*4+*y*4−*x*2*y*2), откуда *x*2+*y*2 ≤ *a*, так как *x*4+*y*4−*x*2*y*2 ≥ *x*2*y*2. Поэтому *x*6+*y*6 = *ax*2*y*2 ⇒ (*x*6+*y*6)(*x*2+*y*2) = *ax*2*y*2(*x*2+*y*2) ≤ *a*2*x*2*y*2. С другой стороны, имеем (*x*6+*y*6)(*x*2+*y*2) ≥ (*x*4+*y*4)2 ≥ 2*x*2*y*2(*x*4+*y*4). Итак, *a*2*x*2*y*2 ≥ 2*x*2*y*2(*x*4+*y*4), откуда и следует искомое неравенство.

♦ Показано только, что *x*2+*y*2 ≤ *a*: *2 балла*.

**8.** *В выпуклом четырехугольнике ABCD сторона BC больше диагонали AC. Точка M — середина диагонали AC. Точка K — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на отрезок AM, а точка L — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на отрезок CM. Оказалось, что AK = LM. Докажите неравенство AB+CD > AD.*

**Решение**. Отметим точку *T* на отрезке *AC* так, что *AK* = *KT*. Тогда *TL* = *LC* (так как *AC* = 2*MC* = 2(*ML*+*LC*) = 2(*AK*+*LC*)). Итак, *KB* и *DL* ⎯ серединные перпендикуляры в отрезкам *AT* и *TC* соответственно, откуда *AB* = *BT* и *DT* = *DC*. Таким образом, *AB*+*DC* = *BT*+*DT* ≥ *DB*. Остается доказать, что *DB* > *DA*. Мы знаем, что *BC* > *AC*, следовательно, ∠*CAB* > ∠*CBA*. Поэтому ∠*DAB* > ∠*CAB* > ∠*CBA* > ∠*DBA*, откуда следует, что *DB* > *DA*.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Младшая группа, первая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *По кругу стоят красная, синяя и зелёная точки. На каждом ходу разрешается проделывать одну из трёх операций:*

*(i) Между любыми двумя разноцветными точками можно вставить точку, совпадающую по цвету с любой из этих двух.*

*(ii) Из любых трёх последовательных точек, среди которых есть одноцветные, можно удалить среднюю.*

*(iii) Между любыми двумя одноцветными точками можно вставить точку любого цвета.*

*После нескольких таких операций осталось снова 3 точки. Докажите, что это снова красная, синяя и зелёная точки.*

**Решение**. Нетрудно проверить, что чётность числа пар разноцветных соседних точек при описанных в условии операциях не меняется. В исходной позиции число таких пар нечётно. Значит, две точки одного цвета и одна ⎯ другого в финальной позиции оказаться не могли. Допустим, там оказались три одноцветные точки. Рассмотрим ход, после которого все точки впервые стали одноцветными. Перед ним все точки, кроме одной, были одного цвета, а одна ⎯ другого, так что количество пар разноцветных соседних точек было чётным. Противоречие.

**2.** *Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа на 15, 21 и 35 равняться 66?*

**Ответ**. Нет. **Решение**. Пусть натуральное число *n* удовлетворяет условию задачи. Обозначим остатки от деления *n* на 15, 21 и 35 через *r*1, *r*2, *r*3 соответственно. Заметим, что *r*1+*r*2+*r*3 = 66 ⇔ *r*1−15+*r*2−21+*r*3−35 = −5. Все числа *r*1−15, *r*2−21, *r*3−35 отрицательны. Поэтому либо два из них равны −1, а одно ⎯ −3, либо два из них равны −2, а одно ⎯ −1. Но тогда, поскольку 15 = 3⋅5, 21 = 3⋅7, 35 = 5⋅7, получается, что число *n* при делении на одно из чисел 3, 5, 7 дает два разных остатка.

**3.** *По кругу стоят несколько гирь, не все они одного веса, и веса не обязательно целые. В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в тройке. Докажите, что число гирь делится на 3.*

**Решение**. Посчитаем все разности, вычитая из веса гири вес правого соседа. Пусть *d* ⎯ наименьшая по модулю разность весов.Заметим, что если в тройке средний вес ⎯ у средней гири, то в этой тройке обе разности равны, а если у крайней, то отношение разностей равно –2. Поэтому все разности принадлежат списку: *d*, –2*d*, 4*d*, –8*d*, … . Пройдя по кругу, мы вернёмся к тому же весу, поэтому сумма всех разностей равна 0. С другой стороны, по модулю 3 все коэффициенты при *d* в разностях равны 1. Поэтому сумма всех разностей должна иметь вид *nd*, где *n* сравнимо с числом гирь по модулю 3. Так как *d* ≠ 0 (поскольку не все гири одинаковы), это возможно только при *n* = 0, откуда и вытекает утверждение задачи.

♦ Доказано, что разности различаются в 2*n* раз, дальнейшего продвижения нет: *4 балла*.

**4.** *На окружности стоят 100 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны иметь общую точку (хотя бы конец). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть, независимо от игры соперника?*

**Ответ**. Вася. **Решение**. Заметим, что если в какой-то момент три проведенные хорды образуют треугольник *ABC*, у которого сторона *AB* соединяет две соседние точки, то в течение игры кроме сторон треугольника *ABC* могут быть проведены те и только те хорды, которые соединяют либо точку *A* с точками на не содержащей точку *A* дуге *BC*, либо точку *B* с точками на не содержащей точку *B* дуге *AC*. Поскольку таких точек ровно 97, последний ход будет за Васей. Покажем, что Вася всегда может добиться появления такого треугольника.

Своим первым ходом Вася проводит хорду *AB* длины 1 с концом в одном из концов хорды *AC*, которую провел перед этим Петя. Если Петя своим вторым ходом провел хорду *BC*, нужный треугольник уже появился, а если он провел хорду *BD*, где *D* ≠ *C*, Вася следующим ходом проведет хорду *AD* и победит. Если же Петя своим вторым ходом провел хорду *AD*, посмотрим, где лежит точка *D*. Если на дуге *AC*, содержащей *B*, то Вася проведет хорду *BC*, иначе ⎯ хорду *BD*, создавая в обоих случаях треугольник со стороной *AB*.

**5.** *Все натуральные числа окрашены в красный и белый цвета (оба цвета присутствуют). Известно, что, если число a белое, то число a+10 также белое. А если число b красное, то число b+15 также красное. При каком наименьшем натуральном n можно наверняка утверждать, среди чисел от 1 до n есть хотя бы 400 белых чисел?*

**Ответ**. При *n* = 2000. **Решение**. Заметим, что все числа, дающие один и тот же остаток при делении на 5, покрашены в один цвет. В самом деле, если число *a* ⎯ белое, а сравнимое с ним по модулю 5 число *b* ⎯ красное, то найдётся число, одновременно представимое и в виде *a*+10*k*, и в виде *b*+15*m*: достаточно подобрать натуральные *k* и *m* так, чтобы 2*k*−3*m* = (*a*−*b*)/5. Поскольку оба цвета присутствуют, в белый цвет покрашен хотя бы один класс вычетов по модулю 5. Если это класс 5*k*, то 400-ое белое число будет равняться 2000, в противном случае 400-ое белое число, очевидно, встретится раньше.

♦ Доказана периодичность раскраски с периодом 5: *не менее 8 баллов*.

**6.** *В ряд выписана тысяча натуральных чисел. Для любого не стоящего с краю числа его квадрат является делителем произведения двух его соседей. Известно, что второе число взаимно просто с последним. Докажите, что первое число делится на второе.*

**Решение**. Пронумеруем числа по порядку: *a*0, …, *a*999. Достаточно доказать, что если *p* ⎯ простое число и *a*1 делится на *pm* (*m* ≥ 1) то и *a*0 делится на *pm*. В самом деле, пусть это не так. Тогда, поскольку *a*0*a*2 делится на *a*12, и *a*12 делится на *p*2*m*, то *a*2 должно делиться хотя бы на *pm*+1. Таким образом, показатель, с которым *p* входит в разложение числа *a*2 на простые множители, должен быть хотя бы на 1 больше соответствующего показателя для *a*1. Аналогично доказывается, что показатель *p* в разложении *a*3 хотя бы на 1 больше показателя *p* в разложении *a*2 и т.д. Но это значит, что все данные числа кроме, может быть, *a*0, делятся на *p*, и *a*999с *a*1 не могут быть взаимно просты. Противоречие.

**7.** *Положительные числа x, y и a удовлетворяют соотношению x3+y3 = axy. Докажите, что x+y ≤ a.*

**Решение**. *x*3+*y*3 = (*x*+*y*)(*x*2−*xy*+*y*2) и *x*2−*xy*+*y*2 ≥ *xy*.

**8.** *Дан треугольник ABC с наибольшей стороной AC. Из точки A опущена высота, ее основание H лежит на стороне BC. Докажите, что AB > 2BH.*

**Решение**. *AB* < *AC* ⇒ *BH* < *CH*. Поэтому на отрезке *HC* есть такая точка *D*, что *HD* = *HB*. Поскольку *AC* ⎯ наибольшая сторона треугольника *ABC*, ∠*ADB* = ∠*ABD* = ∠*ABC* > 60° >∠*BAH*. Таким образом, в треугольнике *BAD* сторона *BD* = 2*BH* лежит против меньшего угла, чем сторона *AB*, откуда *AB* > 2*BH*.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Младшая группа, вторая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *На чёрных клетках шахматной доски 10×10 расставлено 15 белых и 15 чёрных фишек. Белые фишки занимают три первых горизонтали, чёрные ⎯ три последних. За один ход можно одновременно сдвинуть две фишки одного цвета на соседние с ними по диагонали свободные поля. Можно ли такими ходами поменять местами белые фишки с чёрными?*

**Ответ**. Нельзя. **Решение**. Пронумеруем горизонтали снизу вверх: 1, 2, …, 10. Вначале белых фишек на чётных горизонталях нечётное число, а чёрных ⎯ чётное. Если бы поменять белые и чёрные фишки местами было возможно, эти чётности поменялись бы. Но легко видеть, что при описанных в условии ходах эти чётности сохраняются.

**2.** *Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа на 15, 21 и 35 равняться 66?*

**Ответ**. Нет. **Решение**. Пусть натуральное число *n* удовлетворяет условию задачи. Обозначим остатки от деления *n* на 15, 21 и 35 через *r*1, *r*2, *r*3 соответственно. Заметим, что *r*1+*r*2+*r*3 = 66 ⇔ *r*1−15+*r*2−21+*r*3−35 = −5. Все числа *r*1−15, *r*2−21, *r*3−35 отрицательны. Поэтому либо два из них равны −1, а одно ⎯ −3, либо два из них равны −2, а одно ⎯ −1. Но тогда, поскольку 15 = 3⋅5, 21 = 3⋅7, 35 = 5⋅7, получается, что число *n* при делении на одно из чисел 3, 5, 7 дает два разных остатка.

**3.** *По кругу стоят 5 гирь. В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в этой тройке. Докажите, что все гири весят одинаково.*

**Решение**. Посчитаем все разности, вычитая из веса гири вес правого соседа. Пусть *d* ⎯ наименьшая по модулю разность весов.Заметим, что если в тройке средний вес ⎯ у средней гири, то в этой тройке обе разности равны, а если у крайней, то отношение разностей равно –2. Поэтому все разности принадлежат списку: *d*, –2*d*, 4*d*, –8*d*, ….. Пройдя по кругу, мы вернёмся к тому же весу, поэтому сумма всех разностей равна 0. С другой стороны, по модулю 3 все коэффициенты при *d* в разностях равны 1. Поэтому сумма всех разностей должна иметь вид (3*k*+2)*d*. Это возможно только при *d* = 0, что и требовалось доказать.

♦ Доказано, что разности различаются в 2*n* раз, дальнейшего продвижения нет: *4 балла*.

**4.** *На окружности стоят 100 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны иметь общую точку (хотя бы конец). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника?*

**Ответ**. Вася. **Решение**. Заметим, что если в какой-то момент три проведенные хорды образуют треугольник *ABC*, у которого сторона *AB* соединяет две соседние точки, то в течение игры кроме сторон треугольника *ABC* могут быть проведены те и только те хорды, которые соединяют либо точку *A* с точками на не содержащей точку *A* дуге *BC*, либо точку *B* с точками на не содержащей точку *B* дуге *AC*. Поскольку таких точек ровно 97, последний ход будет за Васей. Покажем, что Вася всегда может добиться появления такого треугольника.

Своим первым ходом Вася проводит хорду *AB* длины 1 с концом в одном из концов хорды *AC*, которую провел перед этим Петя. Если Петя своим вторым ходом провел хорду *BC*, нужный треугольник уже появился, а если он провел хорду *BD*, где *D* ≠ *C*, Вася следующим ходом проведет хорду *AD* и победит. Если же Петя своим вторым ходом провел хорду *AD*, посмотрим, где лежит точка *D*. Если на дуге *AC*, содержащей *B*, то Вася проведет хорду *BC*, иначе ⎯ хорду *BD*, создавая в обоих случаях треугольник со стороной *AB*.

**5.** *Все натуральные числа окрашены в красный и белый цвета (оба цвета присутствуют). Известно, что, если число a белое, то число a+10 также белое. А если число b красное, то число b+15 также красное. При каком наименьшем натуральном n можно наверняка утверждать, среди чисел от 1 до n есть хотя бы 400 белых чисел?*

**Ответ**. При *n* = 2000. **Решение**. Заметим, что все числа, дающие один и тот же остаток при делении на 5, покрашены в один цвет. В самом деле, если число *a* ⎯ белое, а сравнимое с ним по модулю 5 число *b* ⎯ красное, то найдётся число, одновременно представимое и в виде *a*+10*k*, и в виде *b*+15*m*: достаточно подобрать натуральные *k* и *m* так, чтобы 2*k*−3*m* = (*a*−*b*)/5. Поскольку оба цвета присутствуют, в белый цвет покрашен хотя бы один класс вычетов по модулю 5. Если это класс 5*k*, то 400-ое белое число будет равняться 2000, в противном случае 400-ое белое число, очевидно, встретится раньше.

♦ Доказана периодичность раскраски с периодом 5: *не менее 8 баллов*.

**6.** *В ряд выписана тысяча натуральных чисел. Для любого не стоящего с краю числа его квадрат является делителем произведения двух его соседей. Известно, что второе число взаимно просто с последним. Докажите, что первое число делится на второе.*

**Решение**. Пронумеруем числа по порядку: *a*0, …, *a*999. Достаточно доказать, что если *p* ⎯ простое число и *a*1 делится на *pm* (*m* ≥ 1) то и *a*0 делится на *pm*. В самом деле, пусть это не так. Тогда, поскольку *a*0*a*2 делится на *a*12, и *a*12 делится на *p*2*m*, то *a*2 должно делиться хотя бы на *pm*+1. Таким образом, показатель, с которым *p* входит в разложение числа *a*2 на простые множители, должен быть хотя бы на 1 больше соответствующего показателя для *a*1. Аналогично доказывается, что показатель *p* в разложении *a*3 хотя бы на 1 больше показателя *p* в разложении *a*2 и т.д. Но это значит, что все данные числа кроме, может быть, *a*0, делятся на *p*, и *a*999с *a*1 не могут быть взаимно просты. Противоречие.

**7.** *Натуральные числа a и b таковы, что число  ⎯ целое. Докажите, что число  ⎯ также целое.*

**Решение**. Достаточно заметить, что разность 20162*b*3−*a*2*b* = *b*(2016*b*−*a*)(2016*b*+*a*) делится на 2016*b*+*a*.

**8.** *Дан треугольник ABC с наибольшей стороной AC. Из точки A опущена высота, ее основание H лежит на стороне BC. Докажите, что AB > 2BH.*

**Решение**. *AB* < *AC* ⇒ *BH* < *CH*. Поэтому на отрезке *HC* есть такая точка *D*, что *HD* = *HB*. Поскольку *AC* ⎯ наибольшая сторона треугольника *ABC*, ∠*ADB* = ∠*ABD* = ∠*ABC* > 60° >∠*BAH*. Таким образом, в треугольнике *BAD* сторона *BD* = 2*BH* лежит против меньшего угла, чем сторона *AB*, откуда *AB* > 2*BH*.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Младшая группа, третья лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *На чёрных клетках шахматной доски 10×10 расставлено 15 белых и 15 чёрных фишек. Белые фишки занимают три первых горизонтали, чёрные ⎯ три последних. За один ход можно одновременно сдвинуть две фишки одного цвета на соседние с ними по диагонали свободные поля. Можно ли такими ходами поменять местами белые фишки с чёрными?*

**Ответ**. Нельзя. **Решение**. Пронумеруем горизонтали снизу вверх: 1, 2, …, 10. Вначале белых фишек на чётных горизонталях нечётное число, а чёрных ⎯ чётное. Если бы поменять белые и чёрные фишки местами было возможно, эти чётности поменялись бы. Но легко видеть, что при описанных в условии ходах эти чётности сохраняются.

♦

**2.** *Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа на 15, 21 и 35 равняться 4?*

**Ответ**. Нет. **Решение**. Пусть натуральное число *n* удовлетворяет условию задачи. Заметим, что 15 = 3⋅5, 21 = 3⋅7, 35 = 5⋅7. Допустим, один из остатков от деления натурального числа *n* на 15, 21 и 35 равен 0. Тогда число *n* делится на два из трёх чисел 3, 5, 7 и не делится на третье ⎯ иначе все остатки были бы нулями. Но тогда каждый из двух ненулевых остатков от деления *n* на 15, 21 и 35 делится на это третье число, и сумма остатков не меньше 3⋅2 = 6. Значит, число *n* не делится ни на одно из чисел 15, 21 и 35. Тогда два из остатков равны 1, а третий равен 2. Но тогда *n*−1 делится на 3, 5 и 7 и, значит, третий остаток тоже должен равняться 1. Противоречие.

**3.** *По кругу стоят 5 гирь. В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в этой тройке. Докажите, что все гири весят одинаково.*

**Решение**. Посчитаем все разности, вычитая из веса гири вес правого соседа. Пусть *d* ⎯ наименьшая по модулю разность весов.Заметим, что если в тройке средний вес ⎯ у средней гири, то в этой тройке обе разности равны, а если у крайней, то отношение разностей равно –2. Поэтому все разности принадлежат списку: *d*, –2*d*, 4*d*, –8*d*, ….. Пройдя по кругу, мы вернёмся к тому же весу, поэтому сумма всех разностей равна 0. С другой стороны, по модулю 3 все коэффициенты при *d* в разностях равны 1. Поэтому сумма всех разностей должна иметь вид (3*k*+2)*d*. Это возможно только при *d* = 0, что и требовалось доказать.

♦ Доказано, что разности различаются в 2*n* раз, дальнейшего продвижения нет: *4 балла*.

**4.** *На окружности стоят 100 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны иметь общий конец. Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника?*

**Ответ**. Петя. **Решение**. Пете достаточно вторым ходом соединить концы двух хорд, проведенных перед этим. Очевидно, к получившемуся треугольнику нельзя присоединить, соблюдая правила игры, ни одной новой хорды.

**5.** *Все натуральные числа окрашены в красный и белый цвета (оба цвета присутствуют). Известно, что, если число a белое, то число a+10 также белое. А если число b красное, то число b+15 также красное. При каком наименьшем натуральном n можно наверняка утверждать, среди чисел от 1 до n есть хотя бы 400 белых чисел?*

**Ответ**. При *n* = 2000. **Решение**. Заметим, что все числа, дающие один и тот же остаток при делении на 5, покрашены в один цвет. В самом деле, если число *a* ⎯ белое, а сравнимое с ним по модулю 5 число *b* ⎯ красное, то найдётся число, одновременно представимое и в виде *a*+10*k*, и в виде *b*+15*m*: достаточно подобрать натуральные *k* и *m* так, чтобы 2*k*−3*m* = (*a*−*b*)/5. Поскольку оба цвета присутствуют, в белый цвет покрашен хотя бы один класс вычетов по модулю 5. Если это класс 5*k*, то 400-ое белое число будет равняться 2000, в противном случае 400-ое белое число, очевидно, встретится раньше.

♦ Доказана периодичность раскраски с периодом 5: *не менее 8 баллов*.

**6.** *Незнайка сложил все двузначные числа, которые можно получить из его семизначного телефонного номера (не содержащего нулей) вычёркиванием 5 цифр. Мог ли он в результате получить число 1000?*

**Ответ**. Нет. **Решение**. Каждая цифра номера входит в 6 двузначных чисел, полученных Незнайкой. Поэтому сумма цифр всех этих двузначных чисел делится на 3, а с ней ⎯ и сумма самих этих чисел.

**7.** *Натуральные числа a и b таковы, что число  ⎯ целое. Докажите, что число  ⎯ также целое.*

**Решение**. Достаточно заметить, что разность 20162*b*3−*a*2*b* = *b*(2016*b*−*a*)(2016*b*+*a*) делится на 2016*b*+*a*.

**8.** *Дан треугольник ABC с наибольшей стороной AC. Из точки A опущена высота, ее основание H лежит на стороне BC. Докажите, что AB > 2BH.*

**Решение**. *AB* < *AC* ⇒ *BH* < *CH*. Поэтому на отрезке *HC* есть такая точка *D*, что *HD* = *HB*. Поскольку *AC* ⎯ наибольшая сторона треугольника *ABC*, ∠*ADB* = ∠*ABD* = ∠*ABC* > 60° >∠*BAH*. Таким образом, в треугольнике *BAD* сторона *BD* = 2*BH* лежит против меньшего угла, чем сторона *AB*, откуда *AB* > 2*BH*.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Группа «Старт», высшая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *На окружности стоят 100 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны пересекаться (возможно по концу). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника?*

**Ответ**. Вася. **Решение**. Заметим, что если в какой-то момент три проведенные хорды образуют треугольник *ABC*, у которого сторона *AB* соединяет две соседние точки, то в течение игры кроме сторон треугольника *ABC* могут быть проведены те и только те хорды, которые соединяют либо точку *A* с точками на не содержащей точку *A* дуге *BC*, либо точку *B* с точками на не содержащей точку *B* дуге *AC*. Поскольку таких точек ровно 97, последний ход будет за Васей. Покажем, что Вася всегда может добиться появления такого треугольника.

Своим первым ходом Вася проводит хорду *AB* длины 1 с концом в одном из концов хорды *AC*, которую провел перед этим Петя. Если Петя своим вторым ходом провел хорду *BC*, нужный треугольник уже появился, а если он провел хорду *BD*, где *D* ≠ *C*, Вася следующим ходом проведет хорду *AD* и победит. Если же Петя своим вторым ходом провел хорду *AD*, посмотрим, где лежит точка *D*. Если на дуге *AC*, содержащей *B*, то Вася проведет хорду *BC*, иначе ⎯ хорду *BD*, создавая в обоих случаях треугольник со стороной *AB*.

**2.** *Незнайка сложил все двузначные числа, которые можно получить из его семизначного телефонного номера (не содержащего нулей) вычёркиванием 5 цифр. Мог ли он в результате получить число 1000?*

**Ответ**. Нет. **Решение**. Каждая цифра номера входит в 6 двузначных чисел, полученных Незнайкой. Поэтому сумма цифр всех этих двузначных чисел делится на 3, а с ней ⎯ и сумма самих этих чисел.

**3.***По кругу стоят красная, синяя и зелёная точки (именно в таком порядке по часовой стрелке). На каждом ходу разрешается проделывать одну из трёх операций:*

*(i) Между любыми двумя разноцветными точками можно вставить точку, совпадающую по цвету с любой из этих двух.*

*(ii) Из любых трёх последовательных точек, среди которых есть одноцветные, можно удалить среднюю.*

*(iii) Между любыми двумя одноцветными точками можно вставить точку любого цвета.*

*После нескольких таких операций осталось снова 3 точки. Докажите, что это снова красная, синяя и зелёная точки (именно в таком порядке по часовой стрелке).*

**Решение**. Назовём красную и синюю точки, стоящие рядом, *положительной* (соотв., *отрицательной*) парой, если синяя точка идет после (соотв., перед) красной по часовой стрелке. Заметим, что положительных пар вначале на одну больше, чем отрицательных, и это свойство сохраняется при описанных в условии операциях. Значит, в финальной позиции будет одна положительная пара, то есть синяя точка идёт после красной по часовой стрелке. Поскольку после синей должна идти зелёная, всё доказано.

**4.** *На чёрных клетках шахматной доски 10×10 расставлено 15 белых и 15 чёрных фишек. Белые фишки занимают три первых горизонтали, чёрные ⎯ три последних. За один ход можно одновременно сдвинуть две фишки одного цвета на соседние с ними по диагонали свободные поля. Можно ли такими ходами поменять местами белые фишки с чёрными?*

**Ответ**. Нельзя. **Решение**. Пронумеруем горизонтали снизу вверх: 1, 2, …, 10. Вначале белых фишек на чётных горизонталях нечётное число, а чёрных ⎯ чётное. Если бы поменять белые и чёрные фишки местами было возможно, эти чётности поменялись бы. Но легко видеть, что при описанных в условии ходах эти чётности сохраняются.

**5.** *Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа на 15, 21 и 35 равняться 4?*

**Ответ**. Нет. **Решение**. Пусть натуральное число *n* удовлетворяет условию задачи. Заметим, что 15 = 3⋅5, 21 = 3⋅7, 35 = 5⋅7. Допустим, один из остатков от деления натурального числа *n* на 15, 21 и 35 равен 0. Тогда число *n* делится на два из трёх чисел 3, 5, 7 и не делится на третье ⎯ иначе все остатки были бы нулями. Но тогда каждый из двух ненулевых остатков от деления *n* на 15, 21 и 35 делится на это третье число, и сумма остатков не меньше 3⋅2 = 6. Значит, число *n* не делится ни на одно из чисел 15, 21 и 35. Тогда два из остатков равны 1, а третий равен 2. Но тогда *n*−1 делится на 3, 5 и 7 и, значит, третий остаток тоже должен равняться 1. Противоречие.

**6.** *В ряд выписана тысяча натуральных чисел. Для любого не стоящего с краю числа его квадрат является делителем произведения двух его соседей. Известно, что второе число взаимно просто с последним. Докажите, что первое число делится на второе.*

**Решение**. Пронумеруем числа по порядку: *a*0, …, *a*999. Достаточно доказать, что если *p* ⎯ простое число и *a*1 делится на *pm* (*m* ≥ 1) то и *a*0 делится на *pm*. В самом деле, пусть это не так. Тогда, поскольку *a*0*a*2 делится на *a*12, и *a*12 делится на *p*2*m*, то *a*2 должно делиться хотя бы на *pm*+1. Таким образом, показатель, с которым *p* входит в разложение числа *a*2 на простые множители, должен быть хотя бы на 1 больше соответствующего показателя для *a*1. Аналогично доказывается, что показатель *p* в разложении *a*3 хотя бы на 1 больше показателя *p* в разложении *a*2 и т.д. Но это значит, что все данные числа кроме, может быть, *a*0, делятся на *p*, и *a*999с *a*1 не могут быть взаимно просты. Противоречие.

**7.** *По кругу стоят 100 натуральных чисел. В каждой тройке подряд стоящих чисел одно из этих чисел равно полусумме двух других. Докажите что все числа равны.*

**Решение**. Будем решать от противного. Выберем удовлетворяющий условию набор чисел, где не все числа равны, с наименьшей возможной суммой. Заметим, что в нём сумма любых трёх стоящих подряд чисел делится на 3. Выберем любое число. Поскольку все остальные числа можно разбить на тройки подряд стоящих, то выбранное число даёт такой же остаток от деления на 3, как и сумма всех чисел. Поэтому все числа дают одинаковый остаток от деления на 3. Если этот остаток нулевой, то все числа можно поделить на 3 и получить набор чисел с меньшей суммой. Если этот остаток равен 1 или 2, то можно добавить ко всем числам 2 или 1 соответственно и поделить на 3 ⎯ после этой операции условие сохранится, а сумма чисел уменьшится, поскольку не все числа равны. Противоречие.

**8.** *У Амбарцума есть восемь кубиков 1×1×1. Каждая грань этих кубиков покрашена в один из 24 цветов. Оказалось, что в каждый цвет покрашены ровно 2 грани (возможно, разных кубиков). Докажите, что из этих кубиков Наири, друг Амбарцума, может сложить куб 2×2×2 таким образом, чтобы на его поверхности встретились все 24 цвета.*

**Решение**. Рассмотрим граф, вершинами которого являются грани кубиков, а рёбра соединяют, во первых, противоположные грани одного кубика и, во-вторых, грани, покрашенные в один цвет (если противоположные грани кубика покрашены в один цвет, они соединяются двумя рёбрами). Получим граф, в котором все вершины имеют степень 2. Он разбивается на непересекающиеся циклы. Поскольку цвета в циклах встречаются парами, длины всех циклов чётны. В каждом цикле отметим одну из вершин и все вершины, между которыми и первой отмеченной ⎯ нечётное число вершин цикла. Тогда будет отмечено по одной грани каждого цвета, и у каждого кубика окажутся отмеченными три грани, среди которых нет противоположных. Три такие грани имеют общую вершину, и потому мы сможем сложить из наших кубиков куб 2×2×2 так, чтобы все отмеченные грани кубиков оказались снаружи.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Группа «Старт», первая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *На окружности стоят 99 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны пересекаться (возможно по концу). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника?*

**Ответ**. Петя. **Решение**. Своим первым ходом Петя проводит хорду, соединяющую две соседние точки. Вася проводит хорду из одного из концов Петиной хорды, а Петя вторым ходом образует треугольник из проведённых хорд. Пусть это треугольник *ABC*, у которого сторона *AB* соединяет две соседние точки. Тогда в течение игры кроме сторон треугольника *ABC* могут быть проведены те и только те хорды, которые соединяют либо точку *A* с точками на не содержащей точку *A* дуге *BC*, либо точку *B* с точками на не содержащей точку *B* дуге *AC*. Поскольку таких точек ровно 96, последний ход будет за Петей.

**2.** *Незнайка сложил все двузначные числа, которые можно получить из его семизначного телефонного номера (не содержащего нулей) вычёркиванием 5 цифр. Мог ли он в результате получить число 1000?*

**Ответ**. Нет. **Решение**. Каждая цифра номера входит в 6 двузначных чисел, полученных Незнайкой. Поэтому сумма цифр всех этих двузначных чисел делится на 3, а с ней ⎯ и сумма самих этих чисел.

**3.***По кругу стоят красная, синяя и зелёная точки. На каждом ходу разрешается проделывать одну из трёх операций:*

*(i) Между любыми двумя разноцветными точками можно вставить точку, совпадающую по цвету с любой из этих двух.*

*(ii) Из любых трёх последовательных точек, среди которых есть одноцветные, можно удалить среднюю.*

*(iii) Между любыми двумя одноцветными точками можно вставить точку любого цвета.*

*Может ли случиться, что после нескольких таких операций останутся точки только двух цветов?*

**Первое решение**. Допустим, после нескольких операций у нас исчез красный цвет. Назовём красную и синюю точки, стоящие рядом, *положительной* (соотв., *отрицательной*) парой, если синяя точка идет после (соотв., перед) красной по часовой стрелке. Заметим, что положительных пар вначале на одну больше, чем отрицательных, и это свойство сохраняется при описанных в условии операциях. Значит, в финальной позиции красный цвет отсутствовать не может. **Второе решение**. Нетрудно проверить, что чётность числа пар разноцветных соседних точек при описанных в условии операциях не меняется. В исходной позиции число таких пар нечётно, а если остались фишки только двух цветов, то оно чётно.

**4.** *На чёрных клетках шахматной доски 10×10 расставлено 15 белых и 15 чёрных фишек. Белые фишки занимают три первых горизонтали, чёрные ⎯ три последних. За один ход можно одновременно сдвинуть две фишки одного цвета на соседние с ними по диагонали свободные поля. Можно ли такими ходами поменять местами белые фишки с чёрными?*

**Ответ**. Нельзя. **Решение**. Пронумеруем горизонтали снизу вверх: 1, 2, …, 10. Вначале белых фишек на чётных горизонталях нечётное число, а чёрных ⎯ чётное. Если бы поменять белые и чёрные фишки местами было возможно, эти чётности поменялись бы. Но легко видеть, что при описанных в условии ходах эти чётности сохраняются.

**5.** *Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа на 15, 21 и 35 равняться 2?*

**Ответ**. Нет. **Решение**. Заметим, что 15 = 3⋅5, 21 = 3⋅7, 35 = 5⋅7. Если число *n* делится на 3, 5 и 7, оно делится и на 15, 21 и 35, то есть сумма остатков равна 0. Пусть оно не делится на 3. Тогда при делении на 15 и 21 получаются ненулевые остатки, и их сумма не меньше 2. Значит, при делении на 35 должен получаться остаток 0, то есть *n* делится на 5 и 7. Но тогда ненулевые остатки от деления этого числа на 15 и 21 должны быть кратны 5 и 7 соответственно, и их сумма больше 2 ⎯ противоречие. Случаи, когда *n* не делится на 5 или на 7, разбираются аналогично.

**6.** *В ряд выписана тысяча натуральных чисел. Для любого не стоящего с краю числа его квадрат является делителем произведения двух его соседей. Известно, что второе число взаимно просто с последним. Докажите, что первое число делится на второе.*

**Решение**. Пронумеруем числа по порядку: *a*0, …, *a*999. Достаточно доказать, что если *p* ⎯ простое число и *a*1 делится на *pm* (*m* ≥ 1) то и *a*0 делится на *pm*. В самом деле, пусть это не так. Тогда, поскольку *a*12 делится на *a*0*a*2, и *a*12 делится на *p*2*m*, то *a*2 должно делиться хотя бы на *pm*+1. Таким образом, показатель, с которым *p* входит в разложение числа *a*2 на простые множители, должен быть хотя бы на 1 больше соответствующего показателя для *a*1. Аналогично доказывается, что показатель *p* в разложении *a*3 хотя бы на 1 больше показателя *p* в разложении *a*2 и т.д. Но это значит, что все данные числа кроме, может быть, *a*0, делятся на *p*, и *a*999с *a*1 не могут быть взаимно просты. Противоречие.

**7.** *Можно ли расставить по кругу числа 1, 2, ..., 99 по одному разу так, чтобы в каждой тройке подряд стоящих чисел одно из них равнялось полусумме двух других?*

**Ответ**. Можно. **Решение**. Сначала запишем подряд против часовой стрелки числа 1, 3, 2, 4, 6, …, 96, 98. Потом от 1 по часовой стрелке выпишем все нечётные числа тройками вида *n*, *n*+4, *n*+2, где *n* = 5, 11, 17, …, 89, 95. При таком построении, как нетрудно проверить, в любой тройке записанных подряд нечётных чисел одно из чисел равно полусумме двух других. В четырёх тройках, где есть числа обеих чётностей: 1, 3, 2; 3, 2, 4; 96, 98, 97; 98, 97, 99 ⎯ тоже всё в порядке.

**8.** *У Амбарцума есть восемь кубиков 1×1×1. Каждая грань этих кубиков покрашена в один из 24 цветов. Оказалось, что в каждый цвет покрашены ровно 2 грани (возможно, разных кубиков). Докажите, что из этих кубиков Наири, друг Амбарцума, может сложить куб 2×2×2 таким образом, чтобы на его поверхности встретились все 24 цвета.*

**Решение**. Рассмотрим граф, вершинами которого являются грани кубиков, а рёбра соединяют, во первых, противоположные грани одного кубика и, во-вторых, грани, покрашенные в один цвет (если противоположные грани кубика покрашены в один цвет, они соединяются двумя рёбрами). Получим граф, в котором все вершины имеют степень 2. Он разбивается на непересекающиеся циклы. Поскольку цвета в циклах встречаются парами, длины всех циклов чётны. В каждом цикле отметим одну из вершин и все вершины, между которыми и первой отмеченной ⎯ нечётное число вершин цикла. Тогда будет отмечено по одной грани каждого цвета, и у каждого кубика окажутся отмеченными три грани, среди которых нет противоположных. Три такие грани имеют общую вершину, и потому мы сможем сложить из наших кубиков куб 2×2×2 так, чтобы все отмеченные грани кубиков оказались снаружи.

XLVII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 19-25.02.2016

# Группа «Старт», вторая лига, 3 тур, решения и указания для жюри.

♦ Оценка в 6 баллов в критериях означает отсутствие решения, если явно не оговорено обратное.

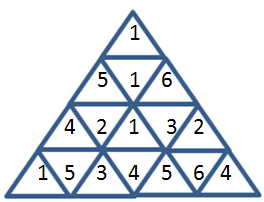
♦ Неразбор случаев в классической геометрии при условии, что хотя бы один существенный случай разобран — дыра не более 4 баллов, если обратное не оговорено. Этот критерий НЕ ОТНОСИТСЯ к задачам по комбинаторной геометрии и геометрическим неравенствам.

**1.** *На чёрных клетках шахматной доски 10×10 расставлено 15 белых и 15 чёрных фишек. Белые фишки занимают три первых горизонтали, чёрные ⎯ три последних. За один ход можно одновременно сдвинуть две фишки одного цвета на соседние с ними по диагонали свободные поля. Можно ли такими ходами поменять местами белые фишки с чёрными?*

**Ответ**. Нельзя. **Решение**. Пронумеруем горизонтали снизу вверх: 1, 2, …, 10. Вначале белых фишек на чётных горизонталях нечётное число, а чёрных ⎯ чётное. Если бы поменять белые и чёрные фишки местами было возможно, эти чётности поменялись бы. Но легко видеть, что при описанных в условии ходах эти чётности сохраняются.

**2.** *Незнайка сложил все двузначные числа, которые можно получить из его семизначного телефонного номера (не содержащего нулей) вычёркиванием 5 цифр. Мог ли он в результате получить число 1000?*

**Ответ**. Нет. **Решение**. Каждая цифра номера входит в 6 двузначных чисел, полученных Незнайкой. Поэтому сумма цифр всех этих двузначных чисел делится на 3, а с ней ⎯ и сумма самих этих чисел.

**3.** *Треугольник разделён на 16 треугольничков отрезками, параллельными сторонам. В какое наибольшее количество цветов можно раскрасить эти треугольнички, чтобы для любой пары различных цветов нашлись треугольнички этих цветов, имеющие общую сторону?*

**Ответ**. 6. **Решение**. *Оценка*. Пар треугольничков с общей стороной у нас 18. Пар различных цветов должно быть не больше, поэтому цветов не больше 6. *Пример* на 6 цветов ⎯ на рисунке.

♦ Только оценка: *2 балла*. Только пример: *4 балла*.

**4.** *На окружности стоят 99 точек. Петя и Вася играют в игру: они по очереди проводят хорды, соединяющие пары этих точек. Любые две проведённые хорды должны пересекаться (возможно по концу). Начинает Петя, а проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков может выиграть независимо от игры соперника?*

**Ответ**. Петя. **Решение**. Своим первым ходом Петя проводит хорду, соединяющую две соседние точки. Вася проводит хорду из одного из концов Петиной хорды, а Петя вторым ходом образует треугольник из проведённых хорд. Пусть это треугольник *ABC*, у которого сторона *AB* соединяет две соседние точки. Тогда в течение игры кроме сторон треугольника *ABC* могут быть проведены те и только те хорды, которые соединяют либо точку *A* с точками на не содержащей точку *A* дуге *BC*, либо точку *B* с точками на не содержащей точку *B* дуге *AC*. Поскольку таких точек ровно 96, последний ход будет за Петей.

**5.** *Может ли сумма остатков от деления некоторого натурального числа на 15, 21 и 35 равняться 2?*

**Ответ**. Нет. **Решение**. Заметим, что 15 = 3⋅5, 21 = 3⋅7, 35 = 5⋅7. Если число *n* делится на 3, 5 и 7, оно делится и на 15, 21 и 35, то есть сумма остатков равна 0. Пусть оно не делится на 3. Тогда при делении на 15 и 21 получаются ненулевые остатки, и их сумма не меньше 2. Значит, при делении на 35 должен получаться остаток 0, то есть *n* делится на 5 и 7. Но тогда ненулевые остатки от деления этого числа на 15 и 21 должны быть кратны 5 и 7 соответственно, и их сумма больше 2 ⎯ противоречие. Случаи, когда *n* не делится на 5 или на 7, разбираются аналогично.

**6.** *Какое наименьшее натуральное значение может принимать разность двух пятизначных чисел: ВЯТКА – КИРОВ ?*

**Ответ**. 251. **Решение**. ВЯТКА–КИРОВ = 10000(В−К)+1000(Я−И)+100(Т−Р)+10(К−О)+(А−В). Так как 10*k* больше любого *k*-значного числа, выигрыш на 1 в любом разряде компенсирует любые проигрыши в младших его разрядах. Значит, В = К+1, Я−И = −9 (откуда Я = 0, И = 9), Т−Р = −7 (откуда Т = 1, Р = 8). К−О = −5 (откуда К = 2, О = 7, В = К+1 = 3). Осталось минимизировать А−В = А−3. 0, 1 и 2 уже заняты, значит, А = 4. Подставляя в пример найденные значения букв, получаем ответ.

♦ Только ответ: *4 балла*.

**7.** *По кругу стоят 4 гири. В каждой тройке подряд стоящих гирь вес одной из них равен среднему арифметическому весов гирь в этой тройке. Докажите, что все гири весят одинаково.*

**Решение**. Если есть равные по весу гири, то в тройке, куда входят эти гири, третья гиря ⎯ того же веса. Тогда и четвёртая гиря ⎯ того же веса. Пусть у всех гирь разные веса. Рассмотрим самую тяжелую и самую лёгкую гири. Они не могут быть средними в каких-либо тройках. Значит, веса остальных гирь равны их среднему арифметическому, т.е. равны между собой. Составим тройку из этих двух гирь (пусть вес каждой из них равен *m*) и самой тяжёлой. Если самая тяжёлая тяжелее, чем они, суммарный вес трёх гирь получается больше 3*m* и меньше утроенного веса самой тяжёлой ⎯ противоречие. Значит, вес самой тяжёлой гири тоже равен *m*. Аналогично, равен *m* и вес самой лёгкой гири.

**8.** *Из 27 одинаковых стеклянных кубиков сложен куб 3×3×3. Прожектор, установленный в кубике, может освещать 3 кубика, расположенных в одном ряду с прожектором в каждом из трёх направлений (всего 7 кубиков, включая прожектор). Какого наименьшего количества прожекторов хватит для освещения всех кубиков?*

**Ответ**. 5. **Решение**. *Оценка*. Если прожекторов четыре, то только один кубик может быть освещён двумя прожекторами. Но тогда в каждом горизонтальном слое из 9 кубиков должно быть не больше одного прожектора, и всего прожекторов не больше трёх, так что освещено не больше 21 кубика. *Пример*. Один прожектор ⎯ в центральном кубике, два ⎯ в концах одной из диагоналей нижнего слоя, ещё два ⎯ в концах перпендикулярной ей диагонали верхнего слоя.

♦ Только оценка или только пример: *6 баллов*.